Institut für Thermodynamik
Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Köhler

19. Februar 2013

# Klausur zur Vorlesung
# Thermodynamik

Für alle Aufgaben gilt: Der Rechen- bzw. Gedankengang muss stets erkennbar sein!
Interpolationsvorschriften und Stützstellen sind anzugeben.
Hilfsmittel sind zugelassen, die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Verwenden Sie ausschließlich die im Lehrbuch angegebenen Dampftafeln.
Falls Ersatzergebnisse angegeben sind, müssen diese auf jeden Fall verwendet werden.

**Aufgabe 1:** *Heizung mit einer Wärmepumpe* 11 von 50 Punkten

Kurzfrage: Ein Erfinder schlägt ein Gerät vor, dass im Sommer die Enthalpie des ca. 15°C warmen Leitungswasser nutzen soll, indem es das Frischwasser für Toiletten auf 2°C abkühlt und die dabei freiwerdende Energie nutzt um die Beleuchtung im Bad zu betreiben. Wie beurteilen Sie den Vorschlag? Wie könnte so eine Maschine technisch realisiert werden?

Ein Haus wird im Winter (Umgebungstemperatur $T_U$ = -10°C) mit einer Wärmepumpe beheizt, um eine Innentemperatur von $T_i = 20°C$ zu gewährleisten, obwohl durch die Außenwände des Hauses ein Wärmestrom von $\dot{Q} = kA(T_i - T_U)$ von innen nach außen strömt. Dabei ist $A = 210\,m^2$ die Oberfläche des Hauses und $k = 0{,}8\,\frac{W}{m^2\,K}$ der Wärmedurchgangskoeffizient, der die Isolationswirkung von Dach und Wänden beschreibt.
Der zum Betrieb der Wärmepumpe benötigte elektrische Strom, wird von einem Kraftwerk bereitgestellt, das sich in der Nähe des Hauses befindet und dessen Brennkammer dem Wärmekraftprozess Wärme bei eine Temperatur von $T_1 = 1200°C$ bereitstellt.

Das reale Kraftwerk habe einen Gesamtwirkungsgrad von $\eta = 0{,}45$, die reale Wärmepumpe eine Leistungszahl von $\varepsilon = 2{,}8$. Gehen Sie von dem fiktiven Fall aus, dass das Kraftwerk ausschließlich Strom für den Betrieb der Wärmepumpe bereitstellt.

a) Welchen Wärmestrom muss die Brennkammer bereitstellen, damit das Haus beheizt werden kann?

b) Wieviel Entropie wird pro Sekunde im oben beschrieben Fall in der Wärmepumpe produziert?

c) Welchen Wärmestrom müsste die Brennkammer bereitstellen, wenn sowohl das Kraftwerk, als auch die Wärmepumpe ideal, also ohne Entropieproduktion arbeiten würden?

d) Zeichnen Sie für diesen idealen Fall ein Exergie-/Anergieflussdiagramm, das die Brennkammer, den Kraftwerksprozess (WKM), die Wärmepumpe und den zu heizenden Raum beinhaltet.

Lösung Aufgabe 1

KF: Im Sommer liegen die Temperaturen i.d.R. über 15°C. Das bedeutet das das Leitungswasser zwar über eine gewisse Exergie verfügt, diese aber nicht durch eine Abkühlung auf 2°C genutzt werden kann.
Im Gegenteil: Um das Wasser auf 2°C abzukühlen, müsste man sogar Arbeit aufwenden.

a) Um den Raum auf 20°C zu halten muss ihm ein Heizwärmestrom von:

$$\dot{Q}_{Heiz} = kA * (T_i - T_U) = 5040\,W \text{ zugeführt werden.}$$

Dafür benötigt die Wärmepumpe eine Zufuhr an technischer Arbeit (el. Strom) von:

$$\dot{W}_t = \frac{\dot{Q}_{Heiz}}{\varepsilon_{WP}} = 1800\,W.$$

Um diesen wiederum bereitzustellen, benötigt der Kraftwerksprozess eine Wärmezufuhr von:

$$\dot{Q}_{BK} = \frac{\dot{W}_t}{\eta_{Kraftwerk}} = 4000\,W,$$

den die Brennkammer bereitstellen muss.

b) Der Wärmepumpe wird zusammen mit der Wärme aus der Umgebung ein Entropiestrom zugeführt und mit der Heizwärme gibt sie einen Entropiestrom ab. Die Differenz dieser beiden Ströme ist die in der WP produzierte Entropie.

$$\dot{Q}_{ab} = \dot{Q}_{Heiz} = 5040\,W \text{ und } \dot{Q}_{zu} = \dot{Q}_{Heiz} - \dot{W}_t = 3240\,W.$$

Daraus ergibt sich für die Entropieströme:

$$\dot{S}_{ab} = \frac{\dot{Q}_{ab}}{T_i} = 17{,}19\,\frac{W}{K} \text{ und } \dot{S}_{zu} = \frac{\dot{Q}_{zu}}{T_U} = 12{,}31\,\frac{W}{K}.$$

Es werden also $\dot{S}_{prod} = 4{,}88\,\frac{W}{K}$ produziert.

c) Ein ideales Kraftwerk hätte einen Wirkungsgrad, der dem Carnot-Wirkungsgrad entspricht:

$$\eta_{c,WKM} = (1 - \frac{T_U}{T}) = (1 - \frac{263{,}15\,K}{1473{,}15\,K}) = 0{,}821.$$

Auch für eine perfekten Wärmepumpe lässt sich das Verhältnis von Arbeit zu Wärme (auf dem hohen Temperaturniveau) auf diese Art bestimmen:

$$(1 - \frac{T_U}{T}) = (1 - \frac{263{,}15\,K}{293{,}15\,K}) = 0{,}1023.$$

Die für das Problem relevante Leistungszahl ist aber das Verhältnis von Heizwärme pro Arbeit, also genau der Kehrwert:

$$\varepsilon_{WP,ideal} = \frac{1}{0{,}1023} = 9,77.$$

(Alternativ kann man auch den 1. und 2. Hauptsatz für die WP aufstellen und $S_{prod} = 0$ setzen). Analog zu a) lässt sich mit diesen neuen Wirkungsgraden ein benötigter Wärmestrom von: $\dot{Q}_{BK,ideal} = 627,9\,W$ berechnen.

d) Die Brennkammer verlässt ein Wärmestrom auf einem hohen Temperaturniveau, also eine Mischung von Exergie und Anergie. Der Kraftwerksprozess, eine ideale WKM, trennt Exergie und Anergie voneinander: Die reine Anergie wird als Abwärme auf Umgebungstemperaturniveau an die Umgebung abgegeben während die reine Exergie als technische Arbeit (bzw. el. Strom) zur Wärmepumpe transportiert wird. Die WP nimmt neben diesem reinen Exergiestrom noch einen reinen Anergiestrom aus der Umgebung auf und gibt eine Mischung aus Exergie und Anergie, also den Heizwärmestrom, an das zu heizende Gebäude oberhalb des Umgebungstemperaturniveaus wieder ab.

**Aufgabe 2:** *Verdichter* 15 von 50 Punkten

Kurzfrage: In welchem der folgenden Zustände liegt der Joule-Thomson-Koeffizient von Propan am nächsten an Null: 1) $180\,bar$ / $320\,K$ oder 2) $1{,}5\,bar/300\,K$ oder 3) $1\,bar/80\,K$

Es werden zwei unterschiedliche Verdichtungsvorgänge betrachtet, die beide mit dem Medium Wasser erfolgen, das in beiden Fällen zunächst bei einem Druck von $p_1 = p_3 = 10\,bar$ vorliegt. (Die Umgebungsluft hat eine Temperatur $t_U = 25°C$ und einen Druck von $p_U = 1\,bar$)

In Fall I wird der Wassermassenstrom, dessen Zustand zunächst im Nassdampfgebiet mit einem Nassdampfgehalt von $x = 0{,}9$ liegt, mit einem idealen, adiabat-isentropen Verdichter vom Zustand 1 auf den Zustand 2 verdichtet.

In Fall II findet die adiabate Verdichtung von $5,973\,\frac{g}{s}$ Wasser , das zunächst als gesättigter Dampf vorliegt, von Zustand 3 auf Zustand 4 mit einem verlustbehafteten Verdichter ($\eta_{S,V} = 0{,}9$) statt, dem eine mechanische Leistung von $W_t = 2{,}5\,kW$ zugeführt wird. Der Druck im Zustand 4 entspricht dem Druck im Zustand 2 (aus Fall I): $p_4 = p_2$

Zustandsgrößen von Wasser im Gasgebiet bei 50 bar:

| $T/K$ | $h/\frac{J}{kg}$ | $s/\frac{J}{K\,kg}$ |
|---|---|---|
| 550 | 2846461 | 6070 |
| 570 | 2915621 | 6193 |
| 590 | 2977034 | 6299 |
| 650 | 3138913 | 6561 |
| 670 | 3188906 | 6637 |
| 690 | 3237804 | 6709 |

a) Skizzieren Sie die beiden Verdichtungsvorgänge in einem T-S-Diagramm.

b) Zeigen Sie, dass $p_4 = 50\,bar$ ist. Berechnen Sie dazu zunächst die spezifische Enthalpie $h_4$ nach dem Verdichtungsvorgang II.

c) Bestimmen Sie alle vier Temperaturen $T_1$-$T_4$.

d) Bei welcher Temperatur schneidet die Verdichtung I die Taulinie?

e) Bestimmen Sie für Fall I die technische Verlustarbeit $W_{tv}$ und für Fall II den spezifischen Arbeitsverlust durch Irreversibilitäten $w_{V,irrev}$.

Lösung Aufgabe 2

KF) Der Joule-Thomson-Koeffizient ist bei idealen Gasen immer Null. In Fall b) verhält sich das Gas am meisten wie ein ideales Gas. (Niedriger Druck, hohe Temperatur)

b) An $5,973\frac{g}{s}$ Wasser wird eine Arbeit von $W_t = 2,5kW$ geleistet. Das bedeutet, dass die Enthalpie nach der Verdichtung um $\frac{2500\,J/s}{5{,}973g/s} = 418,5\frac{kJ}{kg}$ größer ist als vor der Verdichtung. Vor der Verdichtung lässt sich die Enthalpie als h" bei 10 bar aus der Dampftafel für Wasser mit $h_3 = 2777,5\frac{kJ}{kg}$ ablesen. Nach der realen Verdichtung beträgt die Enthalpie also:

$$h_4 = 2777,5\frac{kJ}{kg} + 418,5\frac{kJ}{kg} = 3196\frac{kJ}{kg}$$

Nun berechnen wir die Enthalpie $h_4$ noch auf einem anderen Weg unter der Voraussetzung, dass der Druck $p_4 = 50\,bar$ beträgt. Sollte sich für $h_4$ der selbe Wert ergeben, hätten wir gezeigt, dass der Druck $p_4$ tatsächlich 50 bar beträgt:

Ausgehend von Punkt 3 lässt sich für eine ideale, also isentrope, Verdichtung auf 50 bar die Enthlapie des Zustands 4* aus der in der Aufgabe gegebenen Stoffwertetafel ermitteln:

$$h(50\,bar, s = s_3 = s''(10\,bar)) = 3154\frac{kJ}{kg}.$$

Aus den nun bekannten Enthalpien der Punkte 3 (h = h"(10 bar) = $2778\frac{kJ}{kg}$ ) und 4* lässt sich unter Berücksichtigung des in der Aufgabenstellung gegebenen Wirkungsgrades die Enthalpie des Zustandes 4 nach der realen Verdichtung ermitteln:

$$h_4 = h_3 + \frac{(h_{4*} - h_3)}{\eta_{S,V}} = 3196\frac{kJ}{kg} \text{ q.e.d.}$$

c) Da die Punkte 1 und 3 bei $p = 10\,bar$ im ND-Gebiet liegen, gilt:

$$T_1 = T_3 = T_s(10\,bar) = 179{,}9°C \text{ bzw. } 453{,}0\,K.$$

Punkt 2 ist über den Druck ($p_2 = p_4 = 50\,bar$) und seine Entropie($s_2 = s_1 = s(x = 0{,}9, p = 10bar) = 6{,}140\,\frac{kJ}{kg\,K}$) festgelegt.
Aus der in der Aufgabenstellung gegebenen Stoffwertetafel lässt sich mittels linearer Interpolation die Temperatur $T_2 = 561\,K$ ermitteln.
Punkt 4 ist über den Druck ($p_4 = 50\,bar$) und seine Enthalpie ($h_4 = 3196\frac{kJ}{kg}$) festgelegt. Aus der in der Aufgabenstellung gegebenen Stoffwertetafel lässt sich mittels linearer Interpolation die Temperatur $T_4 = 673\,K$ ermitteln.

d) Die Verdichtung I erfolgt isentrop, d.h., die Entropie bleibt während der gesamten Verdichtung konstant $s = s_1 = 6{,}140\,\frac{kJ}{kg\,K}$. Es wird nun also die Temperatur T gesucht, bei der $s''(T) = s_1$ ist. Mithilfe der Stoffwertetafel für Wasser aus dem Lehrbuch ergibt sich für die gesuchte Temperatur $T = 240\,K$ mittels einer linearen Interpolation zwischen 233,84°C und 263,92°C.

e) Fall I ist eine adiabat, isentrope und somit reversible Verdichtung. Die technische Verlustarbeit ist also gleich Null.
Der spezifische Arbeitsverlust durch Irreversibilitäten $w_{V,irrev}$ lässt sich als Produkt von produzierter Entropie (pro Kg) und Umgebungstemperatur berechnen.Also:

$$w_{V,irrev} = (s_4 - s_3)T_u = (6{,}647\,\frac{kJ}{kg\,K} - 6{,}584\,\frac{kJ}{kg\,K}) * 298{,}15\,K = 1963\frac{kJ}{kg}$$

**Aufgabe 3:** *Entropie* 8 von 50 Punkten

a) Leiten Sie ausgehend von den Gleichungen aus Anhang B des Lehrbuchs eine Gleichung für Luft als ideales Gas mit den konstanten Wärmekapazitäten $c_p = 1{,}006\,\frac{kJ}{kg}$ und $c_v = 0{,}718\,\frac{kJ}{kg\,K}$ her, mit deren Hilfe sich die Entropieänderung (spezifisch) bei einer Zustandsänderung vom Zustand 1 ($p_1$, $T_1$) zum Zustand 2 ($p_2$, $T_2$) bestimmen lässt.

b) Berechnen Sie anschließend die Entropieänderung $\Delta S_{1,2}$, die sich bei einer polytropen Zustandsänderung von $2\,kg$ Luft vom Zustand 1 ($p_1 = 1\,bar$, $t_1 = t_U = 20°C$) auf den Zustand 2 ($p_2 = 5\,bar$) mit einem Polytropenexponenten $n = 1{,}1$ ergibt.

c) Kommentieren Sie die beiden folgenden Aussagen:

1) Die Entropie eines Systems kann bei einer polytropen Verdichtung niemals abnehmen. Das widerspräche dem 2. Hauptsatz.
2) Bei jeder polytropen Verdichtung wird Entropie produziert.

**Aufgabe 4:** *Maximaler Wärmestrom* 11 von 50 Punkten

Kurzfrage: Mit welchem Ansatz kann die Exergie eines warmen Wasserstroms, der signifikant über dem Meeresspiegel zur Verfügung steht, berechnet werden?

In einer Flasche mit einem Volumen von $V = 0{,}2\,m^3$ befindet sich Luft mit einer Temperatur von $t_1 = 300°C$ und einem Druck von $p_1 = 2\,bar$. Die Umgebung hat einen Druck von $p_U = 1\,bar$ und eine Temperatur von $t_U = 13{,}4°C$. Die Luft verhalte sich wie ein ideales Gas den konstanten Wärmekapazitäten $c_p = 1{,}006\,\frac{kJ}{kg}$ und $c_v = 0{,}718\,\frac{kJ}{kg\,K}$.

a) Wie lange kann maximal - unter Verwendung einer geeigneten, idealen Maschine - mit der Luft aus der Flasche ein Wärmestrom von $\dot{Q}_2 = 100\,W$ bei einer Temperatur von $t_2 = 50°C$ bereitgestellt werden?

b) Beschreiben Sie knapp, wie man vorgehen müsste, um die unter a) ermittelte, maximale, Zeit zu erreichen? (Welche Prozesse? Welche Maschinen?)

**Aufgabe 5:** *Beschlagene Brille* 5 von 50 Punkten

Wenn man im Winter von draußen in einen warmen Raum kommt, beschlägt oft die Brille. Beschreiben Sie den Vorgang, der dabei abläuft, knapp in eigenen Worten und rechnen Sie aus, ab welcher maximalen Außentemperatur eine Brille beschlagen kann, wenn Sie nach einem langen Spaziergang in einen Raum kommen, in dem eine Temperatur von $t = 20°C$ und eine relative Luftfeuchte von $\varphi = 60\%$ herrscht!

Lösung Aufgabe 3)

a) Mit Hilfe der Gleichung $v = \frac{RT}{p}$ für ideale Gase, die partiell nach p abgeleitet wird, lässt sich Gleichung B.2 zu:

$$s - s_0 = c_p \cdot ln(T/T_0) - R \cdot ln(p/p_0) \text{ umformen.}$$

b) Zunächst muss die Endtemperatur nach der polytropen Verdichtung ermittelt werden:

$$T_2 = T_1 \cdot (\tfrac{p_2}{p_1})^{\frac{n-1}{n}} = 339{,}3K$$

Setzt man die nun bekannten Druck- und Temperaturwerte der zustände 1 und 2 in die unter a) ermittelte Gleichung ein, so ergibt sich eine Entropieänderung von $-314{,}7\,\frac{J}{kgK}$. Die Entropie nimmt also ab.

c1) Falsch. Bei polytropen Zustandsänderungen wird i.d.R. (solange n ungleich $\kappa$ ist) Wärme mit der Umgebung ausgetauscht. Wird Wärme abgegeben, so sinkt auch die Entropie des Systems.

c2) Fast richtig. Wenn die Temperatur des Systems von der der Umgebung abweicht und trotzdem Wärme zwischen System und Umgebung ausgetauscht wird, wird Entropie produziert. Das ist nur dann nicht der Fall, wenn das System adiabat ist ($n = \kappa$) oder wenn es konstant die Temperatur der Umgebung hat ($n = 1$ und $T = T_U$)

Lösung Aufgabe 4)

KF: Es muss die potentielle Energie sowie die Exergie der Enthalpie des Wasserstroms berücksichtigt werden.

a) Ansatz: Die Exergie der Flasche ist gleich dem Exergiestrom ,der mit dem Wärmestrom transportiert wird, mal der Zeit, die er fließen kann. Die Exergie der Flasche lässt sich berechnen über:

$$-W_{ex,Flasche} = U_1 - U_U + p_U(V_1 - V_U) - T_U(S_1 - S_U)$$
$$u_1 - u_U = 205778\,J/kg$$

lässt sich über $c_v * \Delta T$ berechnen, $v_1 - v_U = 0$ über die thermische Zustandsgleichung idealer Gase ($R = c_p - c_v$ !) und $s_1 - s_U$ über

$$s_1 - s_U = c_p \cdot ln(T_1/T_U) - R \cdot ln(p_1/p_U) = 497{,}7\,J/(kgK).$$

Daraus ergibt sich $-W_{ex,Flasche} = 15360\,J$

Der Exergiestrom des Wärmestroms lässt sich zu $-\dot{W}_{ex} = 100\,W \cdot (1 - T_U/T) = 11{,}33\,W$ berechnen.

Es ergibt sich somit eine maximale Zeit von $t = \frac{-W_{ex,Flasche}}{-\dot{W}_{ex}} = 1356\,s$

b) Um diesen maximalen Wärmestrom bereitzustellen, müsste die Luft in der Flasche durch eine adiabat isentrope und danach isotherme Zustandsänderung dazu gebracht werden, ihre Exergie vollständig als Arbeit abzugeben. Mit dieser Arbeit müsste eine ideale Wärmepumpe (mit Carnot-Wirkungsgrad) betrieben werden, um den gewünschten Wärmestrom bereitzustellen.

Lösung Aufgabe 5)

Beim Betreten des warmen Raums haben die Brillengläser die niedrige Außentemperatur $t_{aussen}$. Warme Luft aus dem Raum kühlt sich beim Annähern an die Brille ab. Dabei sinkt zusammen mit ihrer Temperatur auch der Sättigungspartialdruck des in der Innenluft enthaltenen Wassers. Unterschreitet der Sättigungspartialdruck des Wassers den in der Luft vorhandenen Wasserdampfpartialdruck, so kondensiert Wasser an der Brille aus: Sie beschlägt.
Aus $\phi = 0,6$ und $p_s(20°C) = 0,0234\,bar$ ergibt sich $p_D = 0,01404\,bar$. Mittels linearer Interpolation zwischen 10°C und 15°C ergibt sich aus $p_D = p_s(t_{aussen})$, dass $t_{aussen} =$ 11,85$°C$ ist.